

Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria

Plan de Estudios 2018

Programa del curso

Geometrías no euclidianas



SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA

Primera edición: 2018

Esta edición estuvo a cargo de la Dirección General
de Educación Superior para Profesionales de la Educación
Av. Universidad 1200. Quinto piso, Col. Xoco,
C.P. 03330, Ciudad de México

D.R. Secretaría de Educación Pública, 2018
Argentina 28, Col. Centro, C. P. 06020, Ciudad de México

Índice

| | |
|--|-----------|
| Propósito y descripción general del curso | 5 |
| Competencias del perfil de egreso a las que contribuye el curso | 8 |
| Estructura del curso | 9 |
| Orientaciones para el aprendizaje y enseñanza..... | 10 |
| Sugerencias de evaluación | 11 |
| Unidad de aprendizaje I. Geometría euclidiana..... | 13 |
| Unidad de aprendizaje II. Geometría esférica | 18 |
| Unidad de aprendizaje III. Geometría hiperbólica | 24 |
| Perfil docente sugerido..... | 28 |
| Referencias bibliográficas del programa | 30 |

Trayecto formativo: **Optativos**
Carácter del curso: **Obligatorio**

Horas: **4** Créditos: **4.5**

Propósito y descripción general del curso

Antecedentes

El estudio de la geometría ha estado presente en al menos los tres últimos currículos para la formación de docentes de matemáticas de secundaria. En el Plan de Estudios 1953 se proponían las asignaturas de *Geometría*, *Complementos de Geometría*, *Trigonometría plana y esférica*, *Geometría analítica* y *Elementos de Geometría Descriptiva*. También se ofrecía una materia optativa, cuyo contenido también podía estar relacionado con contenidos de Geometría. En el Plan de Estudios 1983, se ofrecían dos cursos de *Geometría plana y del espacio*, *Trigonometría*, *Geometría analítica* e *Historia de las matemáticas*, en el que se abordaba el estudio de los problemas que dieron origen a la axiomatización de las matemáticas, entre los que se encuentran problemas geométricos. En el Plan de Estudios 1999, de nueva cuenta aparece en el mapa curricular un curso de *Figuras y cuerpos geométricos*, un curso de *Escalas y semejanza*, un curso de *Medición y cálculo geométrico* que abordaba aspectos de *Trigonometría*, y finalmente, un curso de *Historia de las matemáticas*. También se ofrecían dos asignaturas optativas, una de las cuales podía estar dirigida al estudio de la *Geometría Analítica*.

Los contenidos geométricos propuestos en los 3 planes de estudios mencionados estaban organizados bajo la perspectiva euclidiana: a partir de nociones comunes, definiciones y axiomas, los estudiantes demostraban teoremas utilizando el método deductivo, de manera directa o por reducción al absurdo.

Esto permite el desarrollo del razonamiento geométrico (Fischbein, 1993; Avalos Rogel, 1996), y una formación para la argumentación, la organización y sistematización del conocimiento. Como afirma Mario Bunge (2006), para la demostración de muchos teoremas "... es preciso agregarles suposiciones, tales como construcciones, ejemplos o lemas (proposiciones robadas de campos aledaños) ... Otros teoremas euclídeos requieren otras construcciones *ad hoc* más o menos ingeniosas... Su estudio exige tanto ingenio y empeño, como rigor. Forma tanto matemáticos como abogados." (Citado en in Levi, 2006, p. 11).

El planteamiento de los problemas propuestos en las aulas de las Escuelas Normales, y las conjeturas geométricas que pudieran derivarse, dependían de las estrategias para abordar la demostración de un teorema. Pero, como puede observarse, en ningún momento en el marco del desarrollo de esos cursos se interrogó la consistencia del sistema euclidiano, ni se retomó la discusión del V postulado de los Elementos de Euclides, aspecto que dio origen a las geometrías no euclidianas.

- Características generales del curso

El curso *Geometrías no euclidianas* forma del Plan de Estudios de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria, para la formación de docentes de Matemáticas. Pertenece al Trayecto formativo *Optativos: Matemáticas superiores*, y comprende cinco cursos susceptibles de ser elegidos por el estudiantado, en el caso de que la escuela los ofrezca al considerar que se trata de una necesidad regional, en el marco de su autonomía de gestión. Los cursos no son seriados, por lo que el estudiante puede optar por uno de ellos o por el conjunto de cursos que conforman el trayecto. Están orientados a la profundización en aspectos matemáticos

innovadores y actuales. Una hipótesis curricular de este curso es que el estudio de estas geometrías favorece una formación matemática, necesaria para los egresados que estén interesados en incursionar en la docencia en los últimos semestres de la educación obligatoria o en los primeros de la educación superior.

Este curso puede capitalizar las experiencias, conocimientos y competencias desarrolladas en los cursos de Razonamiento geométrico, de Geometría plana y del espacio, y del Trayecto formativo: Práctica profesional.

Además, brinda elementos para entender que la geometría es un área en constante construcción, y que está vinculada con el quehacer humano en las ciencias, la tecnología y el arte.

- Propósitos

Se espera que el estudiante normalista:

Conozca el desarrollo y los modelos de las geometrías no euclidianas, a partir de los problemas matemáticos que les dieron origen, y justifique con argumentos coherentes algunos teoremas de la geometría euclidiana y las geometrías no euclidianas, para reflexionar sobre las implicaciones de las geometrías no euclidianas en la ciencia, la tecnología y el arte.

Adquiera gusto por los retos que ofrecen los problemas para la elaboración de conjeturas derivadas del cuestionamiento del estatus epistemológico del V postulado de los *Elementos*, y reconozca la importancia de escuchar y analizar los argumentos de los matemáticos que desarrollaron las geometrías no euclidianas, así como las aportaciones de sus compañeros en su propia construcción.

- Sugerencias o recomendaciones generales atender

Para entender las geometrías no euclidianas, se propone en primer término una revisión de la Geometría euclidiana. Esto permitirá recuperar los conocimientos previos adquiridos en cursos anteriores.

En un segundo momento, se sugiere el abordaje de la Geometría esférica, en la cual el V postulado de Euclides se sustituye por otro, el cual postula que desde un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna recta paralela a ella. Posteriormente, se sugiere abordar la Geometría hiperbólica, en la que el postulado de las paralelas, se sustituye por otro según el cual desde un punto exterior a una recta se pueden trazar al menos dos paralelas a ella, las cuales separan a todas las rectas que pasan por el punto en dos clases. Una, la de las que cortan a la recta dada y, otra, la de las que no tienen puntos comunes con esa recta.

Desde el ámbito didáctico, analizará las situaciones que lo lleven a comprender la necesidad del programa Erlangen, como una manera de formalizar y dar consistencia matemática a lo ya construido.

- Cursos del Plan de Estudios con los que se relaciona.

El enfoque holista propuesto para esta licenciatura favorece una vinculación entre los contenidos del curso *Geometrías no euclidianas* con otros cursos. A continuación, se muestran las vinculaciones, haciendo énfasis en lo que aporta y le aportan.

Razonamiento geométrico

El curso *Razonamiento geométrico* aporta las bases para la comprensión del conocimiento geométrico: los objetos matemáticos que involucra, las relaciones y las características de las operaciones matemáticas, los problemas que plantea, las formas para resolverlos.

Innovación en la enseñanza de las matemáticas

El curso *Geometrías no euclidianas* ofrece la posibilidad de ver a las matemáticas como un campo de conocimientos en constante cambio.

Geometría plana y del espacio

El curso *Geometrías no euclidianas* permite incorporar una mirada distinta al espacio geométrico, que no sea sólo el de cuerpos y sólidos de revolución.

Didáctica de las matemáticas en educación obligatoria

El curso *Geometrías no euclidianas* aporta elementos para que los futuros docentes identifiquen las características de las matemáticas que se abordan en la educación obligatoria y superior, y las implicaciones didácticas en su abordaje.

Historia y filosofía de las matemáticas

El curso *Geometrías no euclidianas* coadyuva a la comprensión del contexto del surgimiento y el cambio de las matemáticas a lo largo del tiempo.

Proyecto multidisciplinar

El curso *Geometrías no euclidianas* brinda los contextos para la vinculación de las matemáticas con las ciencias, las tecnologías y el arte.

En el rediseño de este programa de estudio participaron docentes: Carlos Bosch Giral, del Instituto Tecnológico Autónomo de México e integrante de la Academia Mexicana de Ciencias; Alejandra Avalos Rogel, de la Escuela Normal Superior de México; Mario Alberto Quiñonez Ayala, de la Escuela Normal Superior de Hermosillo; Roberto Cardozo Peraza, de la Escuela Normal Superior de Yucatán, "Profesor Antonio Betancourt Pérez"; Germán Antonio Aguirre Soto, de la Escuela Normal Superior del Estado de Baja California Sur "Profesor Enrique Estrada Lucero"; Martha Beatriz Rojo Martínez, de la Escuela Normal de Sinaloa; Martha Silvia Escobar Chávez, de la Benemérita Escuela Normal Urbana Federal Fronteriza, Mexicali Baja California; María Esther Pérez Herrera, de la Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de San Luis Potosí; Francisco Guillermo Herrera Armendia, de la Escuela Normal Superior de México.

Especialistas en diseño curricular: Julio César Leyva Ruiz, Gladys Añorve Añorve, Sandra Elizabeth Jaime Martínez, y especialistas técnico-curriculares: Refugio Armando Salgado Morales y Jessica Gorety Ortiz García de la Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación.

Competencias del perfil de egreso a las que contribuye el curso

Competencias genéricas

- Soluciona problemas y toma decisiones utilizando su pensamiento crítico y creativo.
- Aprende de manera autónoma y muestra iniciativa para autorregularse y fortalecer su desarrollo personal.
- Utiliza las tecnologías de la información y la comunicación de manera crítica.
- Aplica sus habilidades lingüísticas y comunicativas en diversos contextos.

Competencias profesionales

Utiliza conocimientos de las matemáticas y su didáctica para hacer transposiciones de acuerdo a las características y contextos de los estudiantes a fin de abordar los contenidos curriculares de los planes y programas de estudio vigentes.

- Identifica marcos teóricos y epistemológicos de las matemáticas, sus avances y enfoques didácticos para la enseñanza y el aprendizaje.

Utiliza la innovación como parte de su práctica docente para el desarrollo de competencias de los estudiantes.

- Implementa la innovación para promover el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes.
- Diseña y/o emplea objetos de aprendizaje, recursos, medios didácticos y tecnológicos en la generación de aprendizajes de las matemáticas.

Competencias disciplinares

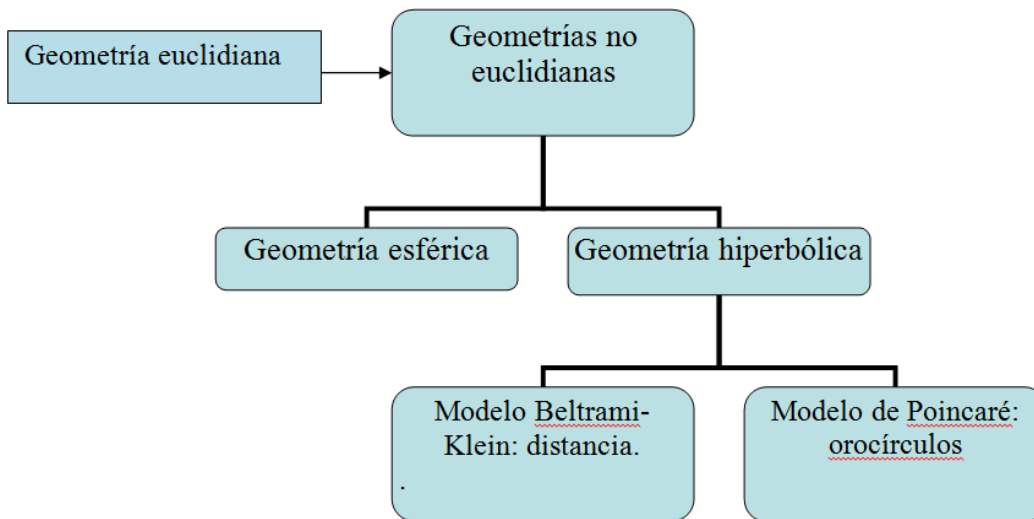
Construye argumentos para diseñar y validar conjeturas en todas las áreas de las matemáticas en diferentes situaciones.

- Analiza distintas situaciones que lleven a diseñar una conjetura.
- Diseña estrategias para validar conjeturas a partir del análisis de información cuantitativa y cualitativa.
- Argumenta de forma coherente y clara si las conjeturas son verdaderas o falsas.

Demuestra con argumentos coherentes las propiedades geométricas de figuras planas y sólidos en la construcción del pensamiento geométrico.

- Reconoce propiedades geométricas de figuras planas y de sólidos
- Relaciona y caracteriza las propiedades geométricas específicas de ciertas figuras planas y de algunos sólidos.
- Resuelve problemas geométricos y construye argumentos coherentes.
- Diseña pruebas y refutaciones en torno a las propiedades geométricas básicas de figuras y sólidos.

Estructura del curso



Se sugiere que se inicie con una revisión de la geometría euclidiana. Para el abordaje de las geometrías no euclidianas se puede iniciar indistintamente con la geometría esférica o la geometría hiperbólica, aunque es posible que la más intuitiva sea la geometría esférica, por sus conocimientos previos de geografía.

Para dar cuenta de la formación integral del estudiante, el curso está organizado en tres unidades de aprendizaje:

- Geometría euclidiana
 - Los *Elementos* de Euclides
 - Definiciones, postulados y nociones comunes
 - El V postulado o postulado de las paralelas
 - Otras expresiones del V postulado: Playfair, Wallis.
 - Los cuadriláteros de Saccheri. Teoremas. El cuadrilátero de Legendre
 - Bolyai y Lovachevsky. Clasificación por Klein y Cayley. Hilbert, Programa Erlanger.
- Geometría esférica
 - La geometría esférica.
 - Postulado V de la geometría esférica (Axioma de Bolyai).
 - Círculos máximos. Los triángulos esféricos. Defecto de un triángulo. Áreas. Semejanza.
 - Conexiones con la geografía y las tecnologías: coordenadas geográficas y localizadores GPS
- Geometría hiperbólica
 - Postulado V de la geometría hiperbólica
 - Modelos de la geometría hiperbólica
 - Modelos de Beltrami-Klein.
 - Modelo de Poincaré.
 - Introducción al espacio hiperbólico
 - Conexiones con el arte: Escher.

Orientaciones para el aprendizaje y enseñanza

Para el desarrollo de las actividades de este curso, se sugiere al menos tres reuniones del colectivo docente, para planear y monitorear las acciones del semestre, e incluso acordar evidencia de aprendizajes comunes.

Se recomienda incluir a la práctica docente el uso de las tecnologías y el trabajo colaborativo, en tanto que permiten desarrollar de manera transversal las competencias genéricas.

Ahora bien, con objeto de favorecer el desarrollo de las competencias, el profesorado podrá diseñar las estrategias pertinentes a los intereses, contextos y necesidades del grupo que atiende. No obstante, en este curso se presentan algunas sugerencias que tiene relación directa con los criterios de evaluación, los productos, las evidencias de aprendizaje y los contenidos disciplinares, así como con el logro del propósito y las competencias, ello a fin de que al diseñar alguna alternativa se cuiden los elementos de congruencia curricular.

Como se señaló en el apartado Orientaciones metodológicas del Plan de Estudios, el enfoque metodológico de los procesos de enseñanza de las matemáticas está centrado en la construcción de ambientes de aprendizaje, cuyo núcleo es el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). En Geometría, los problemas de construcciones geométricas son un medio que permitirá al estudiantado recuperar el bagaje adquirido en su escolaridad, ponerlo en común con sus compañeros, y reorganizarlo para dar solución al problema y para justificar la validez de los procedimientos, de las relaciones y los resultados.

La lectura es otro aporte importante, y se sugiere que, en lo posible, el alumnado recurra a la fuente original para intentar identificar el planteamiento del autor.

El abordaje de este curso mediante un software de geometría dinámica fomentará un trabajo exploratorio más interesante, que deberá estar acompañado de explicaciones y justificaciones basadas en relaciones geométricas. Las actividades con GeoGebra, Scketchpad, o Cabri Géomètre en sus primeras versiones, que recuperen la dependencia entre figuras, permitirán que se establezca el deslinde entre “dibujo” y “trazo”, reflexión que fomentará el formador.

La producción que se genere a lo largo del curso deberá concentrarse en un portafolio de evidencias que se convertirá en un e-Portafolio. Estos elementos serán insumos para la reflexión de su aprendizaje, de los procesos de enseñanza, y será un antecedente que coadyuvará a su titulación.

Sugerencias de evaluación

En congruencia con el enfoque del Plan de Estudios, se propone que la evaluación sea un proceso permanente que permita valorar de manera gradual la forma en que cada estudiante moviliza sus conocimientos, pone en juego sus destrezas y desarrolla nuevas actitudes utilizando los referentes teóricos y experienciales que el curso propone.

La evaluación sugiere considerar los aprendizajes a lograr y a demostrar en cada una de las unidades del curso, así como su integración final. De este modo se propicia la elaboración de evidencias parciales para las unidades de aprendizaje

Las sugerencias de evaluación, como se propone en el Plan de Estudios, consisten en un proceso de recolección de evidencias sobre un desempeño competente del estudiante con la intención de construir y emitir juicios de valor a partir de su comparación con un marco de referencia constituido por las competencias, sus unidades o elementos, y los criterios de evaluación; al igual que en la identificación de aquellas áreas que requieren ser fortalecidas para alcanzar el nivel de desarrollo esperado en cada uno de los cursos del Plan de Estudios, y en consecuencia en el perfil de egreso.

De ahí que las evidencias de aprendizaje se constituyan no sólo en el producto tangible del trabajo que se realiza, sino particularmente en el logro de una competencia que articula sus tres esferas: conocimientos, destrezas y actitudes.

A continuación, se sugiere una estrategia didáctica para el desarrollo del curso, así como para el proceso de evaluación del mismo.

| Evidencia | Naturaleza y componentes de la evidencia | Criterios de la evaluación |
|--|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Portafolio | Conjunto de productos de las actividades desarrolladas en la clase y en las actividades extraclase: organizadores gráficos, construcciones y demostraciones, impresión de pantallas de las actividades de GeoGebra, ejercicios y problemas resueltos, infografías, entre otros. | Manejo correcto de definiciones, nociones comunes, axiomas, y postulados en la demostración de teoremas y en la solución de problemas de la geometría euclidiana. Aplica sus habilidades comunicativas en la organización de la información. Muestra evidencia de la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación en la resolución de los problemas. |
| <ul style="list-style-type: none"> • e-Portafolio | Digitalización del portafolio acompañado de una reflexión sobre los procesos de enseñanza del formador y los procesos de aprendizaje a partir de las evidencias y apoyados en el marco teórico estudiado. | Reflexión autónoma de su propio aprendizaje y muestra el camino recorrido de ese proceso |

| | | |
|--|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Videos e infografías | <p>En los que se recuperen los avances de la geometría desde el siglo XIX, y que incluyan las principales aportaciones, y los vínculos de la geometría con las ciencias, la tecnología y el arte.</p> | |
| <ul style="list-style-type: none"> • Examen | <p>En el que se indaga sobre la apropiación de los conceptos en la resolución de problemas.</p> | <p>Manejo correcto de conceptos y procedimientos en la solución de problemas.</p> |

Unidad de aprendizaje I. Geometría euclidiana

Competencias a las que contribuye la unidad de aprendizaje

Competencias genéricas

- Soluciona problemas y toma decisiones utilizando su pensamiento crítico y creativo.
- Aprende de manera autónoma y muestra iniciativa para autorregularse y fortalecer su desarrollo personal.
- Utiliza las tecnologías de la información y la comunicación de manera crítica.
- Aplica sus habilidades lingüísticas y comunicativas en diversos contextos.

Competencias profesionales

Utiliza conocimientos de las matemáticas y su didáctica para hacer transposiciones de acuerdo a las características y contextos de los estudiantes a fin de abordar los contenidos curriculares de los planes y programas de estudio vigentes.

- Identifica marcos teóricos y epistemológicos de las matemáticas, sus avances y enfoques didácticos para la enseñanza y el aprendizaje.

Competencias disciplinares

Construye argumentos para diseñar y validar conjeturas en todas las áreas de las matemáticas en diferentes situaciones.

- Analiza distintas situaciones que lleven a diseñar una conjetura.

Demuestra con argumentos coherentes las propiedades geométricas de figuras planas y sólidos en la construcción del pensamiento geométrico.

- Reconoce propiedades geométricas de figuras planas y de sólidos
- Resuelve problemas geométricos y construye argumentos coherentes.

Propósitos de la unidad de aprendizaje

- Construye conjeturas sobre los problemas matemáticos que dieron origen a las geometrías no euclidianas mediante la justificación de algunos teoremas de la geometría euclidiana asociados con el V postulado, para reflexionar sobre las implicaciones en la construcción y características del conocimiento matemático moderno.

Contenidos

- *Los Elementos* de Euclides
- Definiciones, postulados y nociones comunes
- El V postulado o postulado de las paralelas
- Otras expresiones del V postulado: Playfair, Wallis.
- Los cuadriláteros de Saccheri. Teoremas. El cuadrilátero de Legendre.

- Bolyai y Lovachevsky. Clasificación por Klein y Cayley. Hilbert, Programa Erlanger

Actividades de aprendizaje

A continuación, se presentan algunas sugerencias de actividades para desarrollar las competencias, no obstante, cada formador de docentes está en la libertad de modificarlas, sustituirlas o adaptarlas.

Generales

- El personal docente recupera los saberes previos del tema.
- El profesorado organiza junto con estudiantes la información de las fuentes necesarias para el aprendizaje de conceptos y procedimientos, para facilitar su consulta.

Específicas

- El estudiantado elabora organizadores gráficos, señalados por el personal docente.
- Los estudiantes elaboran lista de sitios web de información confiable, bajo la dirección del personal docente, sobre temas relacionados con las geometrías euclidianas y no euclidianas.
- Se hace una revisión de los *Elementos* de Euclides.
- De manera individual y grupal exploran otras expresiones del V postulado.
- Hacen las demostraciones de los teoremas sobre cuadriláteros de Saccheri, y los comparan con el cuadrilátero de Legendre. Se resuelven algunos problemas de cuadriláteros con algún software de geometría dinámica, como GeoGebra.
- Se hace una revisión de los teoremas propuestos por Bolyai y Lovachevsky, y la clasificación de Klein y Cayley.
- Se analiza la importancia del programa de Erlangen.

Es importante recordar que una opción de titulación es el portafolio de evidencias, por lo que en este curso se propone elaborar un portafolio que integre las evidencias parciales y finales de cada unidad.

Evidencias

Primer avance del e-Portafolio, el cual incluye la digitalización de las infografías y de las actividades y ejercicios desarrollados en clase acompañados de una reflexión sobre la manera como se elaboran conjeturas.

Criterios de evaluación

Para esta unidad se proponen dos criterios de evaluación de las competencias, y más abajo los indicadores de cada uno de los aspectos que las conforman.

- Demuestra teoremas y soluciona problemas de la geometría euclidiana.
- Identifica las conjeturas derivadas

- Infografías que ilustren las conjeturas y su expresión matemática, en torno al V postulado.

del V postulado de la geometría euclidiana como un problema epistemológico de las matemáticas.

- Examen

Conocimientos

- Enuncia definiciones, axiomas, postulados y teoremas de la geometría euclidiana.
- Identifica las características del método axiomático deductivo para la demostración en Matemáticas.

Habilidades

- Utiliza el método axiomático deductivo para la demostración en Matemáticas.
- Resuelve problemas geométricos, los discute a partir de los argumentos euclidianos, de Saccheri, de Legendre y da evidencia de ello de forma oral y por escrito.
- Resuelve problemas que involucren los teoremas propuestos por Lovachesvsky y Bolyai.
- Resuelve problemas geométricos recurriendo a programas de geometría dinámica.
- Identifica información confiable y la organiza jerárquica, clara y concisamente.
- Explica sus propios procesos de aprendizaje y de sus compañeros, considerando al menos un autor.
- Resuelve problemas de manera correcta.

Actitudes

- Muestra autonomía en su proceso de aprendizaje.
- Escucha las conjeturas y

argumentos de compañeros para formular y validar teoremas de la geometría euclidiana.

- Muestra disposición a la autorregulación de su propio aprendizaje.
- Muestra perseverancia para concluir con las tareas y actividades.
- Valores
- Respeta las opiniones, ideas y participaciones de los colegas.
- Refleja honestidad al citar el trabajo de sus colegas y otros autores. Respeta sus aportaciones.

Ponderación sugerida

Portafolio 40%

e-Portafolio 10%

Infografías 30%

Examen 20%

La consideración del porcentaje del portafolio atiende a promoverlo como herramienta de reflexión, donde los estudiantes tienen la oportunidad de incluir las evidencias y relacionarlas con las competencias declaradas en el curso.

En cuanto al e-Portafolio, se asignó el 10% para favorecer el respaldo electrónico de las evidencias de todos los cursos, propiciar la reflexión del estudiantado sobre sus procesos de aprendizaje, e incrementar los índices de titulación por portafolio de evidencias.

A continuación, se presenta un conjunto de textos, de los cuales el profesorado podrá elegir aquellos que sean de mayor utilidad, o bien, a los cuales tenga acceso, pudiendo sustituirlos por textos más actuales.

Bibliografía básica

Kolmogorov, A. N. (1985). *La matemática: su contenido, su método y significado*. España: Alianza Universidad.

Bidwell, E. (1904). Spherical geometry. *The American Mathematical Monthly*, vol. 11, no. 1, (1904). pp. 1-6

Bonola, R. (1955). *Non Euclidean Geometry*. N.Y.: Dover Publications.

Euclides. (1991). *Elementos v. 1*. Madrid: Gredos.

Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías*, Vol. 1. México: Noriega Limusa.

Ramírez Galarza, A. I., Sienna Loera, G. (2002). *Invitación a las Geometrías no euclidianas*. México: Facultad de Ciencias, UNAM.

Yaglom, I. M. (1979). *A simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basics*. Springer Verla

Bibliografía complementaria

Lascurain, A. (2005). *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. México: UNAM.

Bidwell, E. (1904). Spherical geometry. *The American Mathematical Monthly*, vol. 11, no. 1, (1904). pp. 1-6

Bonola, R. (1955). *Non Euclidean Geometry*. N.Y.: Dover Publications.

Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías*, Vol. 1. México: Noriega Limusa.

Kolmogorov, A. N. (1985). *La matemática: su contenido, su método y significado*. Madrid: Alianza Universidad.

Legendre, A. M. (1891). *Éléments de géométrie*. Paris: Libraire de Firmin Didot.

Poincaré, H. (2009). *Analysis Situs and its five supplements*. N. Y.: HTK Editions.

Rosenfeld, B. A. (1980). *A History of Non- Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space*. N. Y.: Springer Verlag.

Sánchez Ron, J. M. (Editor). (2006). *Félix Klein. Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*. Barcelona: Editorial Crítica. Cap. 4.

Santaló, L. (1966). *Geometrías no euclidianas*. Buenos Aires: EUDEBA.

Recursos de apoyo

- Canales de youtube
 - José Luis Tabara Carbajo
 - NewNewton
- Sitios web
 - GeoGebra
 - <http://geometrias-no-euclidianas.blogspot.mx>

Unidad de aprendizaje II. Geometría esférica

Competencias a las que contribuye la unidad de aprendizaje

Competencias genéricas

- Utiliza las tecnologías de la información y la comunicación de manera crítica.
- Aplica sus habilidades lingüísticas y comunicativas en diversos contextos.

Competencias profesionales

Utiliza conocimientos de las matemáticas y su didáctica para hacer transposiciones de acuerdo a las características y contextos de los estudiantes a fin de abordar los contenidos curriculares de los planes y programas de estudio vigentes.

- Identifica marcos teóricos y epistemológicos de las matemáticas, sus avances y enfoques didácticos para la enseñanza y el aprendizaje.

Competencias disciplinares

Construye argumentos para diseñar y validar conjeturas en todas las áreas de las matemáticas en diferentes situaciones.

- Diseña estrategias para validar conjeturas a partir del análisis de información cuantitativa y cualitativa.
- Argumenta de forma coherente y clara si las conjeturas son verdaderas o falsas.

Demuestra con argumentos coherentes las propiedades geométricas de figuras planas y sólidos en la construcción del pensamiento geométrico.

- Relaciona y caracteriza las propiedades geométricas específicas de ciertas figuras planas y de algunos sólidos.
- Resuelve problemas geométricos y construye argumentos coherentes.
- Diseña pruebas y refutaciones en torno a las propiedades geométricas básicas de figuras y sólidos.

Propósito de la unidad de aprendizaje

- Conoce el desarrollo y modelos de la geometría no euclidiana esférica, a través de técnicas y procedimientos para la resolución de problemas de trazo y construcción sobre la esfera o su proyección, que le permitan conjeturar sobre relaciones geométricas de figuras y demostrar con argumentos coherentes, algunos teoremas.
- Adquiere el gusto por los retos que ofrecen las conjeturas de las relaciones geométricas en la esfera, mediante el uso de software geométrico 3D, satelital y de localización GPS, para establecer vinculaciones con la ciencia.

Contenidos

- La geometría esférica.
- Postulado V de la geometría esférica (Axioma de Bolyai).
- Círculos máximos. Los triángulos esféricos. Defecto de un triángulo. Áreas. Semejanza.
- Conexiones con la geografía y las tecnologías: coordenadas geográficas y localizadores GPS

Actividades de aprendizaje

A continuación, se presentan algunas sugerencias de actividades para desarrollar las competencias, no obstante, cada formador de docentes está en la libertad de modificarlas, sustituirlas o adaptarlas.

Generales

- El personal docente recupera los saberes previos del tema.
- Los estudiantes elaboran lista de sitios web de información confiable, bajo la dirección del personal docente.
- El profesorado organiza junto con los estudiantes la información de las fuentes necesarias para el aprendizaje de conceptos y procedimientos, para facilitar su consulta.

Específicas

- El estudiantado elabora organizadores gráficos, señalados por el personal docente.
- En grupos pequeños fundamentan, mediante un ensayo, la reflexión de los procesos de evolución y construcción del conocimiento de la geometría.
- De manera individual y grupal exploran el concepto de ángulo a través de los giros.
- Diseñarán y desarrollarán una actividad de sostenibilidad ambiental mediante el uso de manipulables analógicos (globos terráqueos), APP de GPS y satelitales, para identificar coordenadas y zonas geográficas vulnerables, a partir de relaciones de paralelismo y perpendicularidad sobre la esfera.

La actividad de sostenibilidad es integradora, por lo que sus resultados son la evidencia de aprendizaje de esta unidad, se sugiere incorporarlos al portafolio de evidencias.

Evidencias

Segundo avance del e-Portafolio, el cual incluye la digitalización de los resultados del proyecto, y de los problemas y ejercicios desarrollados en clase, acompañados de una

Criterios de evaluación

Para esta unidad se proponen dos criterios de evaluación de las competencias, y más abajo los indicadores de cada uno de los aspectos que las conforman.

reflexión sobre la manera como se elaboraron las conjeturas.

- Resultados de la actividad de sostenibilidad ambiental.
- Examen

- Demuestra teoremas y soluciona problemas de la geometría esférica.

- Vincula los contenidos de la geometría esférica con la ciencia, la tecnología y el cuidado del ambiente.

Conocimientos

- Enuncia definiciones, axiomas, postulados y teoremas de la geometría esférica.
- Explica las características de relaciones geométricas inter e intrafigurales sobre la esfera.

Habilidades

- Resuelve problemas geométricos, donde figuras como los triángulos están en una esfera.
- Resuelve problemas geométricos recurriendo a programas de geometría dinámica.
- Explica sus procesos de aprendizaje y de sus compañeros, considerando al menos un autor.
- Resuelve problemas de manera correcta.

Actitudes

- Muestra autonomía en su proceso de aprendizaje.
- Escucha las conjeturas y argumentos de compañeros para formular y validar teoremas de la geometría esférica.
- Muestra disposición a la autorregulación de su propio aprendizaje.
- Es flexible para aplicar lo que sabe en favor del cuidado del ambiente.
- Muestra perseverancia para concluir con las tareas y actividades.

Valores

- Respetar las opiniones, ideas y participaciones de los colegas.
- Reflejar honestidad al citar el trabajo de sus colegas y otros autores. Respetar sus aportaciones.

Ponderación sugerida

Portafolio 40%

e-Portafolio 10%

Actividad integradora 30%

Examen 20%

La consideración del porcentaje del portafolio atiende a promoverlo como herramienta de reflexión, donde los estudiantes tienen la oportunidad de incluir las evidencias y relacionarlas con las competencias declaradas en el curso.

En cuanto al e-Portafolio, se asignó el 10% para favorecer el respaldo electrónico de las evidencias de todos los cursos, propiciar la reflexión del estudiantado sobre sus procesos de aprendizaje, e incrementar los índices de titulación por portafolio de evidencias.

A continuación, se presenta un conjunto de textos, de los cuales el profesorado podrá elegir aquellos que sean de mayor utilidad, o bien, a los cuales tenga acceso, pudiendo sustituirlos por textos más actuales.

Bibliografía básica

Bidwell, E. (1904). Spherical geometry. *The American Mathematical Monthly*, vol. 11, no. 1, (1904). pp. 1-6

Bonola, R. (1955). *Non Euclidean Geometry*, N.Y.: Dover Publications.

Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías*, Vol. 1. México: Noriega Limusa.

Kolmogorov, A. N. (1985). *La matemática: su contenido, su método y significado*. Madrid: Alianza Universidad.

Legendre, A. M. (1891). *Éléments de géométrie*. Paris: Librairie de Firmin Didot.

Poincaré, H. (2009). *Analysis Situs and its five supplements*. N. Y.: HTK Editions.

Ramírez Galarza, A. I., Sienna Loera, G. (2002). *Invitación a las Geometrías no euclidianas*. México: Facultad de Ciencias, UNAM.

Rosenfeld, B. A. (1980). *A History of Non- Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space*. N. Y.: Springer Verlag.

Sánchez Ron, J. M. (Editor). (2006). *Félix Klein. Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*. Barcelona: Editorial Crítica. Cap. 4.

Santaló, L. (1966). *Geometrías no euclidianas*. Buenos Aires: EUDEBA.

Bibliografía complementaria

Lascurain, A. (2005). *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. México: UNAM.

Davis, Ch. (1854). *Geometry and Trigonometry based on A. M. Legendre Work*. Cincinnati: A.S. Barnes Edition.

Eddington, A. S. (1975). *The Mathematical Theory of Relativity*. N. Y.: Chelsea Publishing Company.

Eves, H. (1995). *College Geometry*. Boston MA.: Jones and Bartlett Edition [Part II].

Galbrun, H. (1923). *Théorie de la relativité. Calcul Différentiel et Géométrie*. Paris: Gauthier- Villars.

Gray, J. (2004). János Bolyai. *Non-Euclidean Geometry and the Nature of Space*. Cambridge. MA. MIT Press.

Greenberg, M. (1973). *Euclidean and non- Euclidean Geometries*. N. Y.: W. H. Freeman and Company.

Holme, A. (2000). *Geometry. Our Cultural Heritage*. N. Y.: Sprenger Verlag [Parte II. Caps. 7 – 14].

Yaglom, I. M. (1979). *A simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basics*. Springer Verlag

Recursos de apoyo

- Canales de youtube
José Luis Tabara Carbajo
NewNewton

Sitios web

GeoGebra

<http://geometrias-no-euclidianas.blogspot.mx>

Unidad de aprendizaje III. Geometría hiperbólica

Competencias a las que contribuye la unidad de aprendizaje

Competencias genéricas

- Utiliza las tecnologías de la información y la comunicación de manera crítica.
- Aplica sus habilidades lingüísticas y comunicativas en diversos contextos.

Competencias profesionales

Utiliza conocimientos de las matemáticas y su didáctica para hacer transposiciones de acuerdo a las características y contextos de los estudiantes a fin de abordar los contenidos curriculares de los planes y programas de estudio vigentes.

- Identifica marcos teóricos y epistemológicos de las matemáticas, sus avances y enfoques didácticos para la enseñanza y el aprendizaje.

Competencias disciplinares

Construye argumentos para diseñar y validar conjeturas en todas las áreas de las matemáticas en diferentes situaciones.

- Diseña estrategias para validar conjeturas a partir del análisis de información cuantitativa y cualitativa.
- Argumenta de forma coherente y clara si las conjeturas son verdaderas o falsas.

Demuestra con argumentos coherentes las propiedades geométricas de figuras planas y sólidos en la construcción del pensamiento geométrico.

- Relaciona y caracteriza las propiedades geométricas específicas de ciertas figuras planas y de algunos sólidos.
- Resuelve problemas geométricos y construye argumentos coherentes.
- Diseña pruebas y refutaciones en torno a las propiedades geométricas básicas de figuras y sólidos.

Propósito de la unidad de aprendizaje

- Conozca el desarrollo y modelos de la geometría no euclidiana hiperbólica, y demuestre con argumentos coherentes algunos teoremas.
- Establezca conexiones con el arte a partir de la identificación de relaciones geométricas en planos hiperbólicos, con el fin de que adquiera gusto por los retos que ofrecen los problemas derivados del cuestionamiento del estatus epistemológico del V postulado de los *Elementos* y su aplicación en otras esferas del quehacer humano.

Contenidos

- Postulado V de la geometría hiperbólica

- Modelos de la geometría hiperbólica
 - Modelos de Beltrami-Klein.
 - Modelo de Poincaré.
- Introducción al espacio hiperbólico
- Conexiones con el arte: Escher.

Actividades de aprendizaje

A continuación, se presentan algunas sugerencias de actividades para desarrollar las competencias, no obstante, cada formador de docentes está en la libertad de modificarlas, sustituirlas o adaptarlas.

Generales

- El personal docente recupera los saberes previos del tema.
- Los estudiantes elaboran lista de sitios web de información confiable, bajo la dirección del personal docente.
- El profesorado organiza junto con los estudiantes la información de las fuentes necesarias para el aprendizaje de conceptos y procedimientos, para facilitar su consulta.

Específicas

- El estudiantado elabora organizadores gráficos, señalados por el personal docente.
- En grupos pequeños fundamentan, mediante un ensayo, la reflexión de los procesos de avance de la geometría no euclidiana desde la discusión del V Postulado.
- De manera individual y grupal exploran los dos modelos de la geometría hiperbólica.
- Utilizando carteles y pinturas de Escher, valoran la conexión de la geometría con el arte.

Evidencias

Tercera entrega del e-Portafolio, el cual incluye la digitalización de los resultados de la conexión con el arte, y de los problemas y ejercicios desarrollados en clase acompañados de una reflexión sobre la manera como se elaboraron las conjeturas.

- Ensayo

Criterios de evaluación

Para esta unidad se proponen dos criterios de evaluación de las competencias, y más abajo los indicadores de cada uno de los aspectos que las conforman.

- Demuestra teoremas y soluciona problemas de la geometría hiperbólica.
- Vincula los contenidos de la geometría hiperbólica con el

- Examen

quehacer humano.

Conocimientos

- Establece relaciones necesarias y suficientes en las relaciones geométricas en el disco y el espacio hiperbólico.

Habilidades

- Resuelve problemas que involucren relaciones geométricas plantadas en los modelos de la geometría hiperbólica.
- Tiene información confiable, clara, organizada jerárquicamente y concisa.
- Incluye todos los elementos de un ensayo
- Explica sus procesos cognitivos y de sus compañeros, considerando al menos un autor.
- Resuelve problemas de manera correcta.

Actitudes

- Muestra autonomía en su proceso de aprendizaje.
- Escucha las conjeturas y argumentos de compañeros para formular y validar el conocimiento métrico.
- Muestra disposición a la autorregulación de su propio aprendizaje.
- Muestra perseverancia para concluir con las tareas y actividades.

Valores

- Respeta las opiniones, ideas y participaciones de los colegas.
- Refleja honestidad al citar el trabajo de sus colegas y otros autores. Respeta sus aportaciones.

Ponderación sugerida

- Portafolio 40%
- e-Portafolio 10%
- Ensayo 30%
- Examen 20%

La consideración del porcentaje del portafolio atiende a promoverlo como herramienta de reflexión, donde los estudiantes tienen la oportunidad de incluir las evidencias y relacionarlas con las competencias declaradas en el curso.

En cuanto al e-Portafolio, se asignó el 10% para favorecer el respaldo electrónico de las evidencias de todos los cursos, propiciar la reflexión del estudiantado sobre sus procesos de aprendizaje, e incrementar los índices de titulación por portafolio de evidencias.

A continuación, se presenta un conjunto de textos, de los cuales el profesorado podrá elegir aquellos que sean de mayor utilidad, o bien, a los cuales tenga acceso, pudiendo sustituirlos por textos más actuales.

Bibliografía básica

- Bidwell, E. (1904). Spherical geometry. *The American Mathematical Monthly*, vol. 11, no. 7, (1904). pp. 1-6
- Bonola, R. (1955). *Non Euclidean Geometry*, N.Y.: Dover Publications.
- Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías, Vol. 1*. México: Noriega Limusa.
- Kolmogorov, A. N. (1985). *La matemática: su contenido, su método y significado*. Madrid: Alianza Universidad.
- Lascurain, A. (2005). *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. México: UNAM.
- Legendre, A. M. (1891). *Éléments de géométrie*. Paris: Libraire de Firmin Didot.
- Poincaré, H. (2009). *Analysis Situs and its five supplements*. N. Y.: HTK Editions.
- Ramírez Galarza, A. I., Sienna Loera, G. (2002). *Invitación a las Geometrías no euclidianas*, México: Facultad de Ciencias, UNAM.
- Rosenfeld, B. A. (1980). *A History of Non- Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space*. N. Y.: Springer Verlag.

Sánchez Ron, J. M. (Editor). (2006). *Félix Klein. Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*. Barcelona: Editorial Crítica. Cap. 4.

Santaló, L. (1966). *Geometrías no euclidianas*. Buenos Aires: EUDEBA.

Bibliografía complementaria

Davis, Ch. (1854). *Geometry and Trigonometry based on A. M. Legendre Work*. Cincinnati: A.S. Barnes Edition.

Eddington, A. S. (1975). *The Mathematical Theory of Relativity*. N. Y.: Chelsea Publishing Company.

Eves, H. (1995). *College Geometry*. Boston MA: Jones and Bartlett Edition [Part II].

Galbrun, H. (1923). *Théorie de la relativité. Calcul Différentiel et Géométrie*. Paris: Gauthier- Villars.

Gray, J. (2004). *János Bolyai. Non-Euclidean Geometry and the Nature of Space*. Cambridge. MA: MIT Press.

Greenberg, M. (1973). *Euclidean and non- Euclidean Geometries*. N. Y.: W. H. Freeman and Company.

Holme, A. (2000). *Geometry. Our Cultural Heritage*. N. Y.: Sprenger Verlag [Parte II. Caps. 7 – 14].

Yaglom, I. M. (1979) *A simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basics*. Springer Verlag

Recursos de apoyo

- Canales de youtube
José Luis Tabara Carbajo
NewNewton

Sitios web

GeoGebra

<http://geometrias-no-euclidianas.blogspot.mx>

Perfil docente sugerido

Perfil académico

Matemáticas

Educación en la Especialidad en Matemáticas

Física

Otras afines

Deseable: Experiencia de investigación en el área de matemáticas superiores.

Nivel Académico

Obligatorio nivel de licenciatura, preferentemente maestría o doctorado en el área de conocimiento de matemáticas, física, o ciencias exactas.

El nivel de matemáticas debe ser muy fuerte.

Experiencia docente para:

Conducir grupos

Planear y evaluar por competencias

Utilizar las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje

Retroalimentar oportunamente el aprendizaje de los estudiantes.

Experiencia profesional

Referida a la experiencia laboral en la profesión sea en el sector público, privado o de la sociedad civil.

Referencias bibliográficas del programa

Avalos Rogel, A. (1997). *Estudio de las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en un curso de actualización*. Tesis de Maestría. México: DIE- CINVESTAV

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics* v. 24, n. 2, Dordrecht, p. 139 - 162. 1993.

Levi, B. (2006). *Leyendo a Euclides*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sitios web

<http://galileo2.com.mx>

<http://arquimedes.mate.unam.mx>

<https://www.geogebra.org/>

<https://www.concursosprimavera.es/#concurso> (España)

<https://www.mathway.com/es/PreAlgebra>

<https://www.vitutor.com/>

<https://es.khanacademy.org/math/geometry-home/basic-geo/basic-geometry-shapes>

<https://www.educatina.com/r?categoria=matematicas&subcategoria=aritmetica&rama=sistemas-de-numeracion>

<https://www.sectormatematica.cl/educsuperior.htm>

GeoGebra

<http://geometrias-no-euclideanas.blogspot.mx>

Recursos de apoyo

Canales de youtube

José Luis Tabara Carbajo

NewNewton